Contents

Disjoint Paths

Disjoint path network: G=(V,E,*s*,*t*)

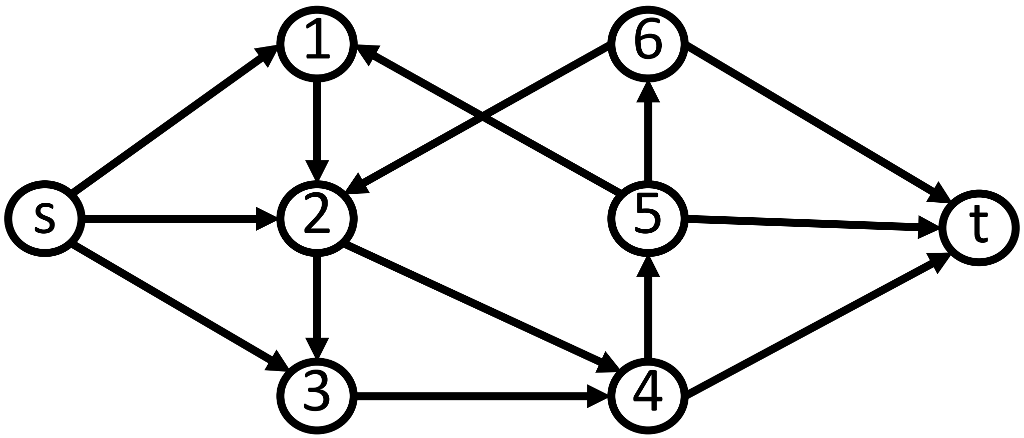
- กราฟแบบมีทิศทาง (V,E) source *s* และ sink *t*
- Path 2 path จะเป็น **edge-disjoint path** ถ้าทั้งสอง path นั้นไม่มีการใช้เส้นเชื่อม (edge) ที่เหมือนกันเลย

- **Disjoint path problem:** ต้องการหา edge-disjoint s-t path จำนวนมากที่สุด

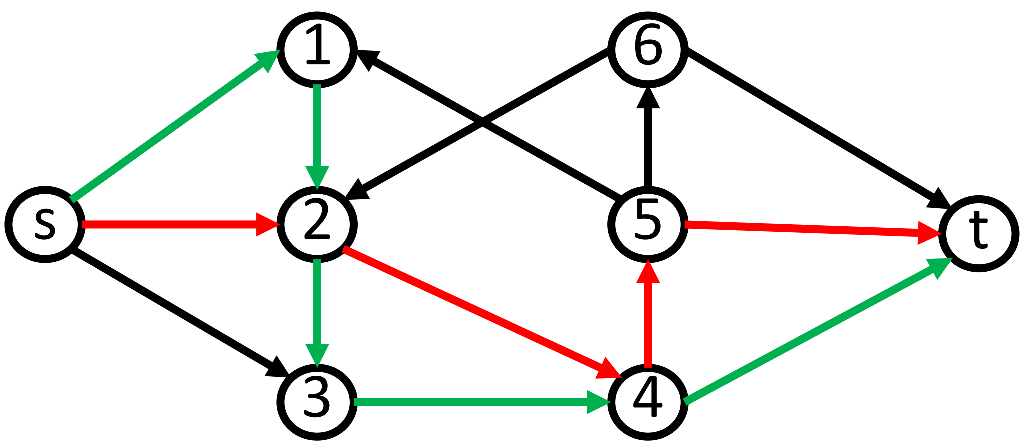
Application ที่นำไปใช้ได้แก่ เครือข่ายการติดต่อสื่อสาร

Disjoint Paths

Input



Solution



2 paths

Disjoint Paths

เราจะแก้ปัญหานี้ได้อย่างไร

มีเงื่อนไขว่าเส้นเชื่อมหนึ่งเส้นถูกใช้ได้เพียงครั้งเดียว

เส้นเชื่อมที่เลือกต้องต่อกันเป็น path

มีวิธีการอะไรคล้ายไหม

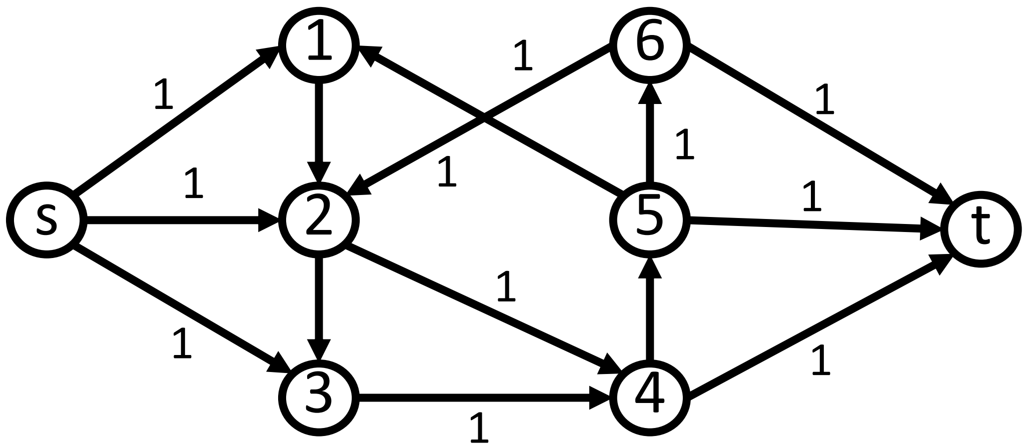
เราพบว่าปัญหา Max-flow คล้าย เพราะว่ามีการส่ง flow จาก s ไป t

ซึ่งการส่ง flow ต้องต่อเนื่องกัน

เราจะเปลี่ยนไปเป็นปัญหา Max-flow นั้นต้องมีการปรับอะไรบ้าง
เพิ่มอะไรบ้าง หรือลดอะไรบ้าง

Max-flow formulation

กำหนดให้แต่ละเส้นเชื่อมมีความจุ 1 หน่วยทุกเส้นเชื่อม



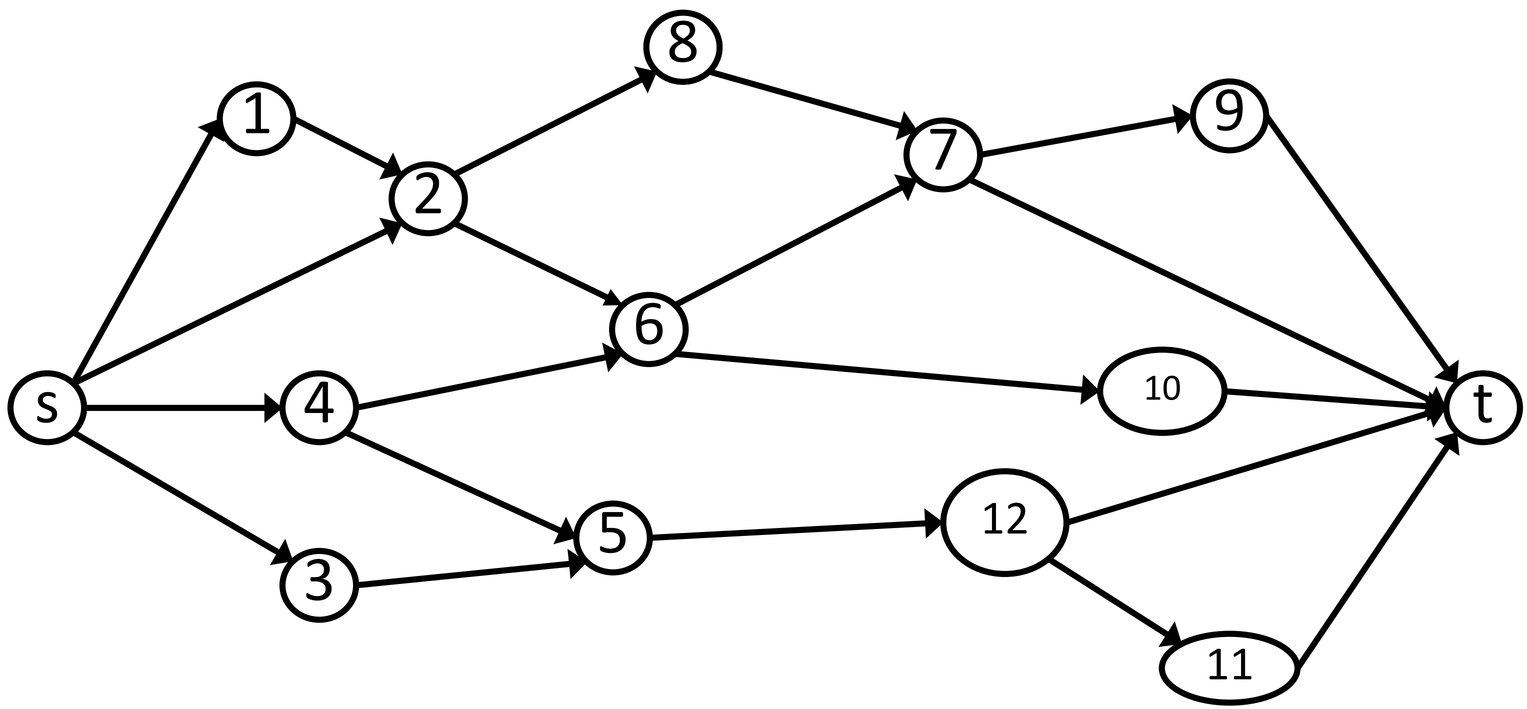
จากนั้นใช้ Max-flow algorithm ในการแก้ปัญหา

คำถาม ถ้า Max-flow algorithm หาคำตอบได้ k หน่วยแสดงว่ามี edge-disjoint paths กี่ path

Disjoint Paths Problem & Max Flow Problem

Theorem

มี k edge-disjoint paths จาก s ไป t ก็ต่อเมื่อ max flow มีค่าเป็น k



Network Connectivity

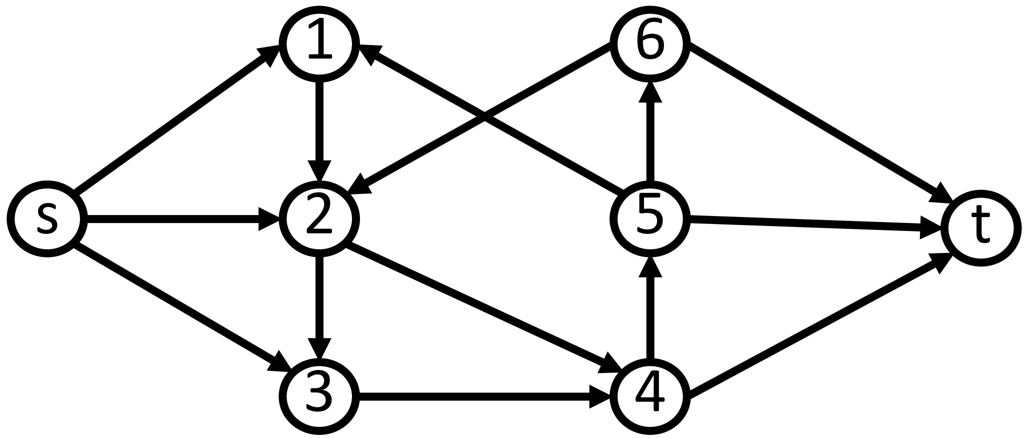
Network connectivity network: G=(V, E, s, t)

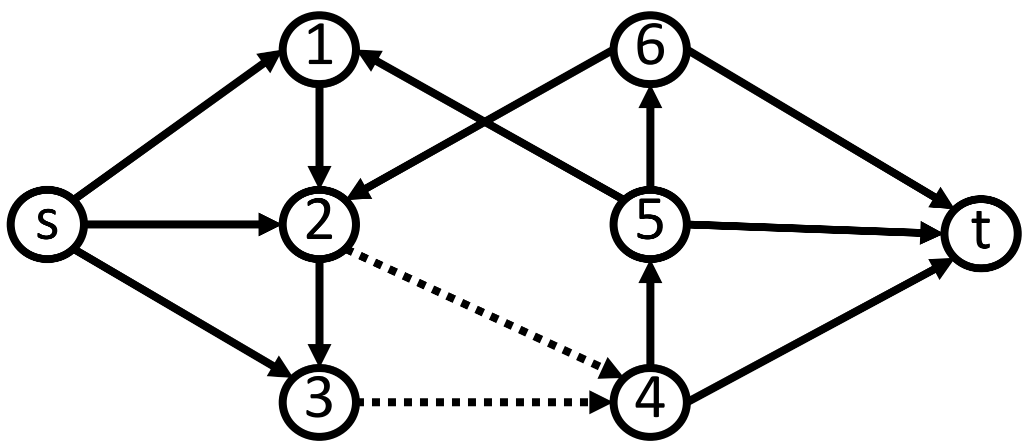
- กราฟแบบมีทิศทาง (V,E) source s และ sink t
- เซตของเส้นเชื่อม $F \subseteq E$ ที่**ตัดการเชื่อมต่อ** (disconnect) ระหว่าง t กับ s ถ้าทุกๆ s-t paths ใช้อย่างน้อย 1 เส้นเชื่อมใน F

Network connectivity: หาจำนวนเส้นเชื่อมที่น้อยที่สุดที่เมื่อเอาเส้นเชื่อมออกแล้วจะตัดการเชื่อมต่อระหว่าง t กับ s

Network Connectivity

Input





Network Connectivity

ข้อสังเกต จำนวนของเส้นเชื่อมที่ต้องเอาออกมีค่าเท่ากับอะไร

จำนวนของ edge-disjoint s-t path

Theorem (Menger's Theorem)

จำนวนของ edge-disjoint s-t paths ที่มากที่สุด

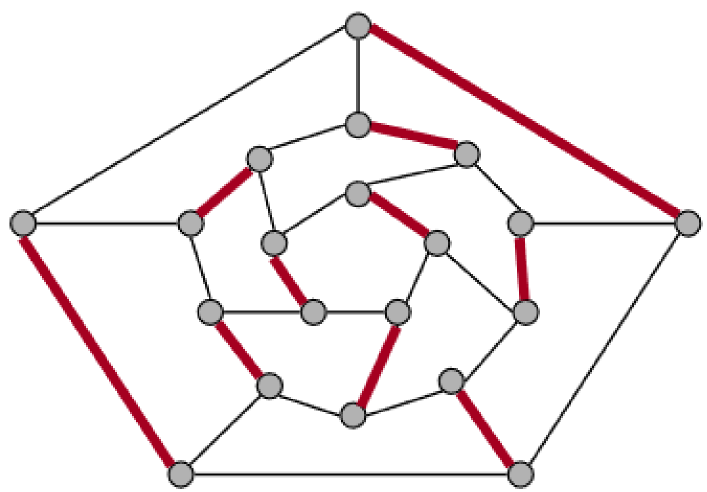
จะเท่ากับ จำนวนของเส้นเชื่อมที่น้อยที่สุดที่ตัดการเชื่อมต่อระหว่าง s กับ t

Matching

Matching

- Input: กราฟแบบไม่มีทิศทาง G=(V,E)
- $M \subseteq E$ เป็น matching ถ้าแต่ละโหนดปรากฏอยู่ในเส้นเชื่อม M ไม่เกิน 1 ครั้ง

Max matching: หาจำนวนของ matching ที่มากที่สุด

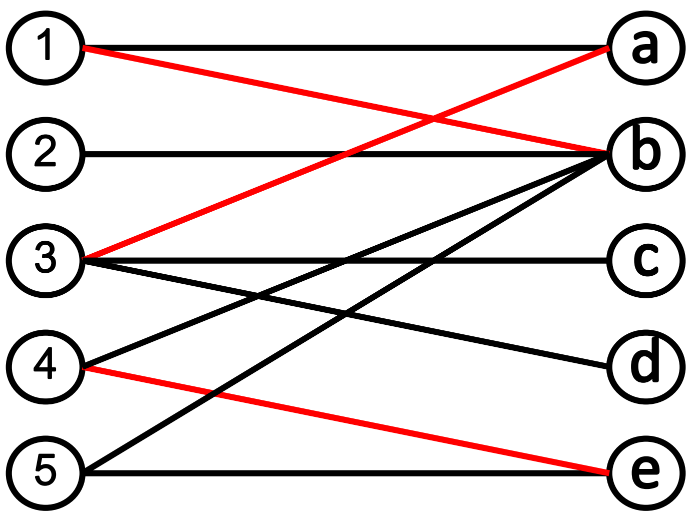


Bipartite Matching

Bipartite matching

- Input: กราฟแบบไม่มีทิศทาง G=(L U R,E)
- $M \subseteq E$ เป็น matching ถ้าแต่ละโหนดปรากฏอยู่ในเส้นเชื่อม M ไม่เกิน 1 ครั้ง

Max matching: หาจำนวนของ matching ที่มากที่สุด



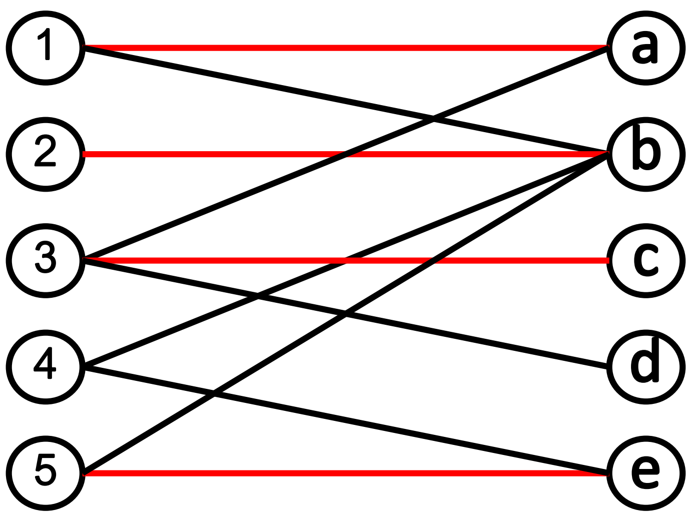
Matching
1-b,3-a,4-e

Bipartite Matching

Bipartite matching

- Input: กราฟแบบไม่มีทิศทาง G=(L U R,E)
- $M \subseteq E$ เป็น matching ถ้าแต่ละโหนดปรากฏอยู่ในเส้นเชื่อม M ไม่เกิน 1 ครั้ง

Max matching: หาจำนวนของ matching ที่มากที่สุด



Matching
1-a,2-b,3-c,5-e

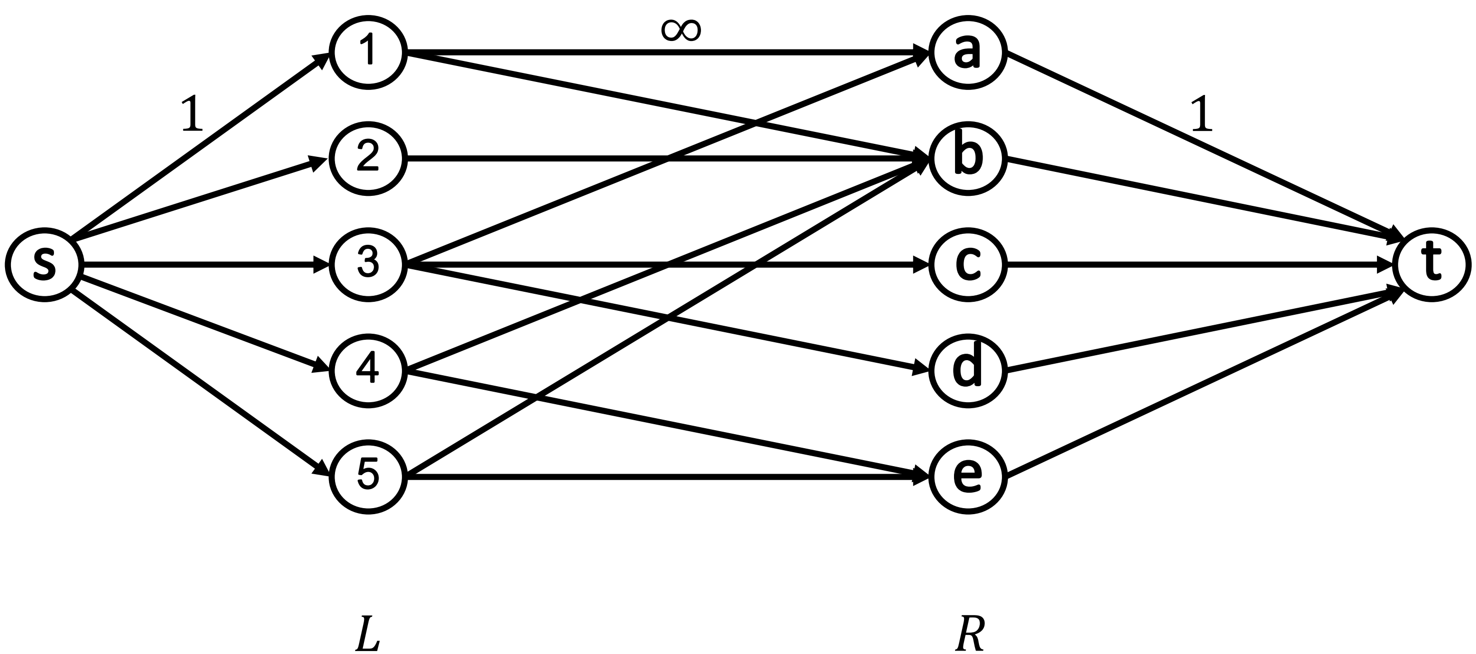
Bipartite Matching

Max flow formulation

- สร้างกราฟแบบมีทิศทาง G’=(L U R U {s,t},E’)
- กำหนดทิศทางจาก L ไป R โดยให้ capacity เป็น infinity
- เพิ่ม source s และเพิ่มเส้นเชื่อมแบบมีทิศทางความจุ 1 หน่วยจาก s ไปยังแต่ละโหนดใน L
- เพิ่ม sink t และเพิ่มเส้นเชื่อมแบบมีทิศทางความจุ 1 หน่วยจากแต่ละโหนดใน R ไปยัง t

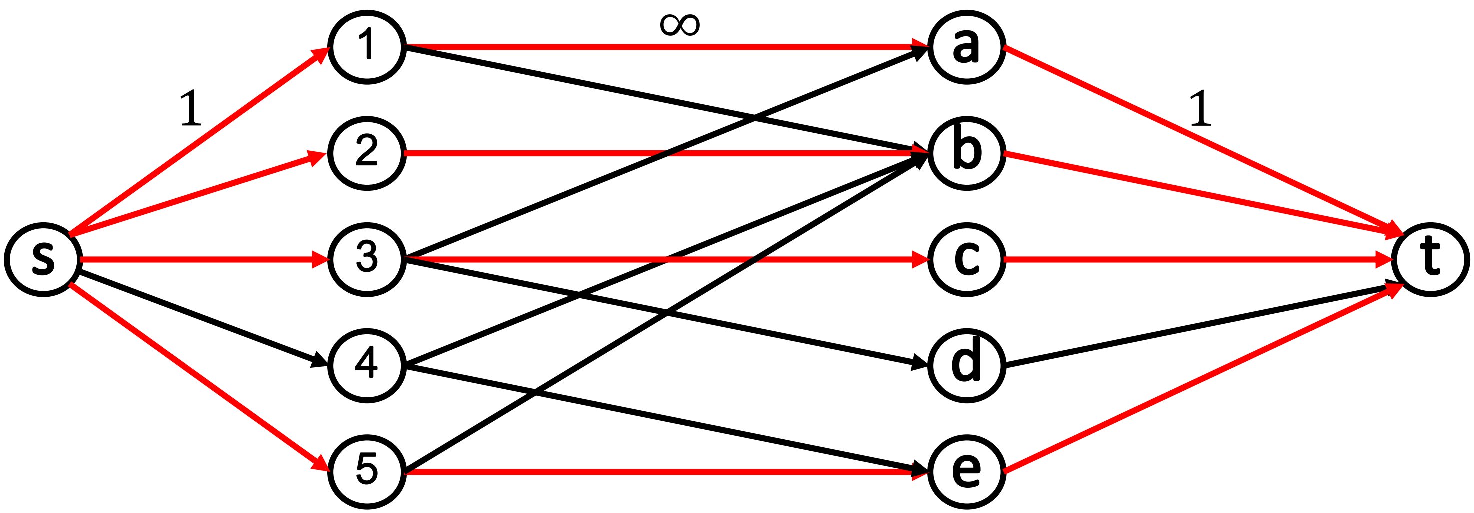
Bipartite Matching

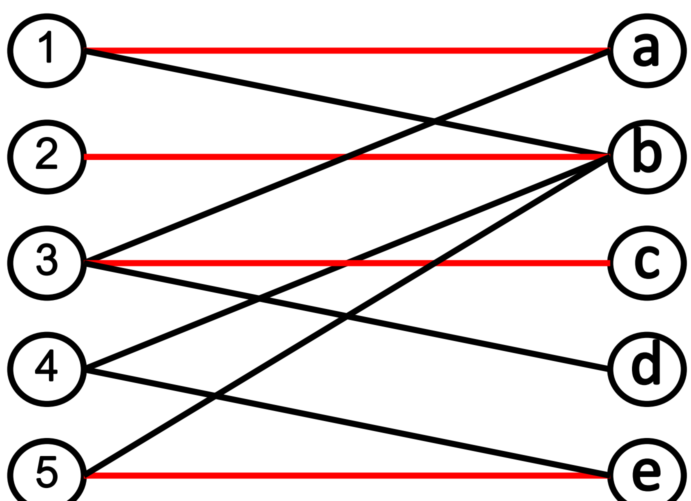
Max flow formulation



Bipartite Matching

flow f ที่มีค่า k ใน G'จะทำให้ได้ matching ขนาด k ใน G

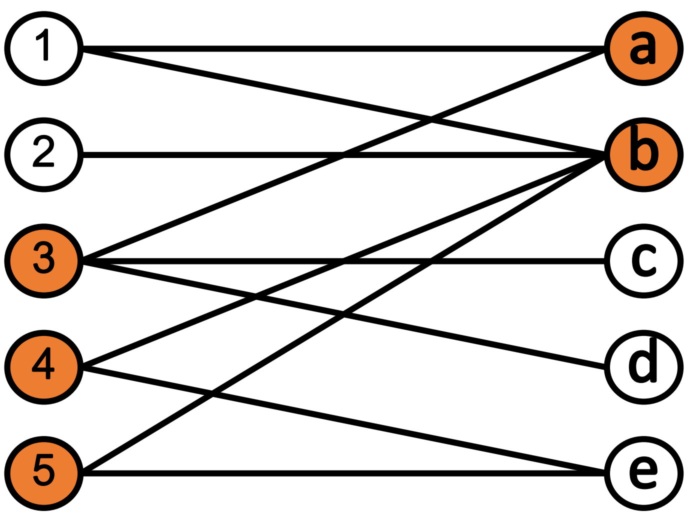




Vertex cover

กำหนดกราฟแบบมีทิศทาง G=(V,E)

vertex cover คือ subset ของ vertices $C \subseteq V$ ที่ ทุกเส้นเชื่อม $(v, w) \in E$ มี $v \in C$ หรือ $\mathrm{w} \in C$ หรือทั้งคู่

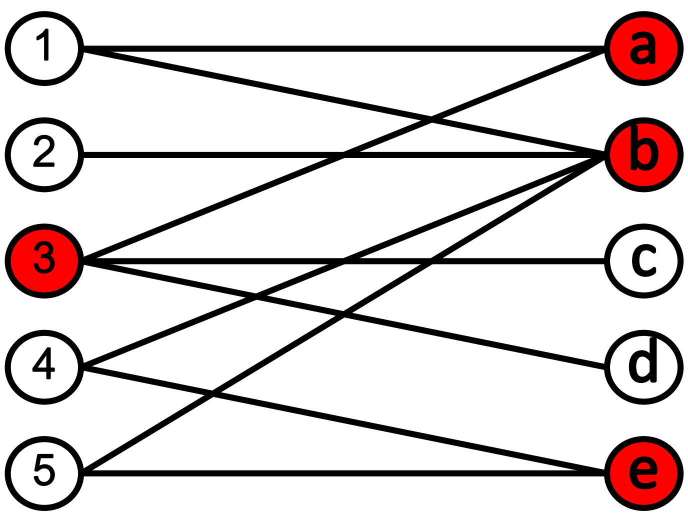


C={3,4,5,a,b}
|C|=5

Vertex cover

กำหนดกราฟแบบมีทิศทาง G=(V,E)

vertex cover คือ subset ของ vertices $C \subseteq V$ ที่ ทุกเส้นเชื่อม $(v, w) \in E$ มี $v \in C$ หรือ $\mathrm{w} \in C$ หรือทั้งคู่

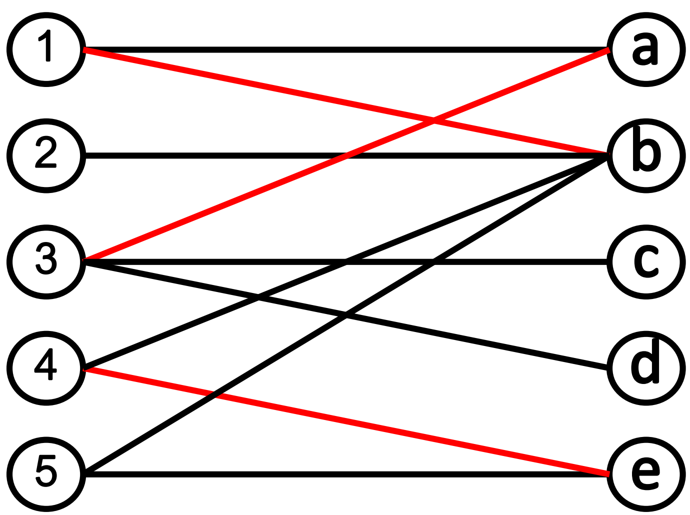


C={3,a,b,e}
|C|=4

Vertex cover

ข้อสังเกต ให้ M เป็น matching และให้ C เป็น vertex cover เราสังเกตได้ว่า $|M| \leq |C|$

แต่ละ vertex สามารถ cover ได้ไม่เกิน 1 เส้นเชื่อมใน matching

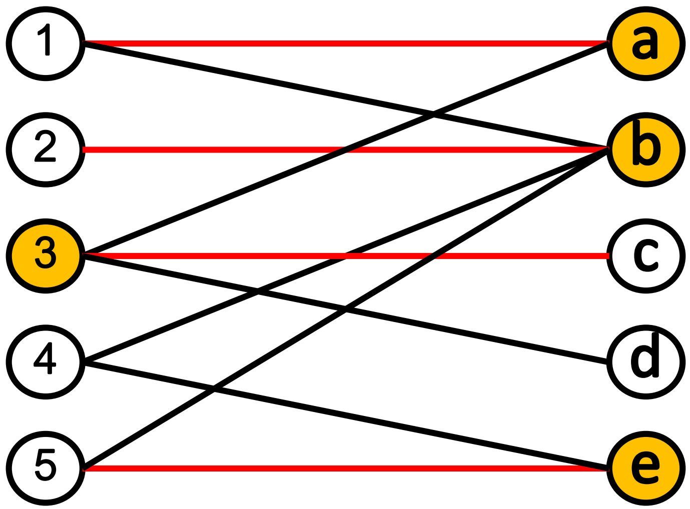


Matching
1-b,3-a,4-e

Vertex cover

Konig-Egervary Theorem: ใน bipartite undirected graph, จำนวนของ matching ที่มากที่สุดจะเท่ากับจำนวนของ vertex cover ที่น้อยที่สุด

M*={1-a,2-b,3-c,5-e}
|M*|=4



C*={a,b,3,e}
|C*|=4